**Wielomiany i szeregi Taylora**

**5.XII.2014r.**

*Źródło: M. Skwarczyński „Istota Struktury Formalnej – przystępny podręcznik matematyki”*

Rozważmy przypadek, że dla pewnej funkcji $f\colon P \to \mathbb{R}$ ($P$ – przedział), w punkcie $x_0 \in P$ znamy jej pochodne wyższych rzędów, $f^{(n)}(x_0)$, do $n$-tego włącznie.

Pytanie brzmi: co możemy powiedzieć o funkcji i jej przebiegu, znając jej pochodne? Czy możemy jakoś określić jej przybliżoną postać w okolicy punktu $x_0$ ?

Co do pierwszej pochodnej, $f'(x_0)$ , mamy już pewne intuicje i wiedzę, krążącą wokół pojęć styczności do wykresu oraz punktów podejrzanych o ekstremum. Rozwińmy i wykroczmy poza ten temat.

Stwórzmy mianowicie najpierw wielomian (pierwszego stopnia),

$$W_1(x) \;:=\; f(x_0) \;+\; f'(x_0)\cdot(x-x_0).$$

Jest on funkcją liniową o wolnym wyrazie $f(x_0)$ i współczynniku kierunkowym $f'(x_0)$ . Obserwujemy, że jeśli chodzi o wyjściową funkcję $f$, to $W_1$ ma tę samą co ona wartość w $x_0$ oraz tę samą wartość pochodnej w tym punkcie (sprawdź!). Na marginesie: wiemy, że $W_1$ reprezentuje *styczną* do wykresu funkcji $f$ w punkcie $x_0$ : wartość pochodnej $f'(x_0)$ jest tangensem kąta nachylenia owej stycznej do osi odciętych ($OX$).

Teraz uogólnijmy tę obserwację i zauważmy, że funkcja

$$W_2(x) \;:=\; f(x_0) \;+\; f'(x_0)\cdot(x-x_0) \;+\; \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2$$

zgadza się z wyjściową funkcją $f$ w punkcie $x_0$ co do wartości funkcji, pochodnej i drugiej pochodnej. Postępując tak dalej otrzymamy:

$$W_n(x) \;:=\; f(x_0) \;+\; \frac{f'(x_0)}{1!}\cdot(x-x_0)^1 \;+\; \dots \;+\; \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \qquad (1)$$

przejawia zgodność z $f$ co do każdej pochodnej od 0 do $n$: $W_n^{(m)}(x_0) = f^{(m)}(x_0),\ m=0,1,\ldots,n$. Biorąc pod uwagę, że pochodna kolejnego rzędu ukazuje profil, charakter zmian pochodnej poprzedniego rzędu, widzimy, że taka kolekcja pochodnych ze współczynnikami, jaką stanowi *$W_n(x_0)$, bardzo* precyzyjnie odzwierciedla charakter samej $f$ w otoczeniu $x_0$.

Wielomian (1) nazywamy **wielomianem Taylora** rzędu $n$ dla funkcji $f$ w punkcie $x_0$. To, jak dalece (lub: jak niewiele) formuła przybliżona (1) różni się od funkcji $f(x)$ niech określa **wzór Taylora:**

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}\cdot(x-x_0)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x) \quad , \qquad (2)$$

gdzie $R$ – reszta Taylora – wskazuje dokładną różnicę pomiędzy $f(x)$ a $W_n(x)$ dla danego $x$.

Oczywiście, celowość i sensowność wzoru Taylora zależy właśnie od tego, na ile mała i nieznacząca jest reszta $R$. Kwestię tę rozstrzygają następujące dwa Stwierdzenia:

**Stwierdzenie 1** *(reszta Taylora w formie Peano):*

Reszta $R_n$ we wzorze (2) dąży do zera **szybciej,** niż $(x - x_0)^n$; ściśle mówiąc, zachodzi równość

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0 \quad .$$

Oznacza to więc, że formuła (1), czyli (2) bez $R_n$, przy zbliżaniu się do $x_0$ staje się coraz dokładniejszym odwzorowaniem $f(x)$: $R_n$ staje się coraz mniej znaczące, szybciej, niż każde z wyrażeń składowych przybliżenia. Dowód stwierdzenia pomijamy.

Czytelnikowi powinno przypomnieć się dopasowywanie wykresu wielomianu do wykresu funkcji w zadanym punkcie: im wyższy stopień wielomianu, tym lepsze jest dopasowanie i dalej sięga wokół owego punktu – wykresy w większym zakresie prawie się pokrywają (cf. http://www2.seminolestate.edu/lvosbury/images/SineMac.gif – dopasowanie wielomianów do wykresu sinusa (niebieska lina) wokół zera.

Czytelnik zwróci także uwagę, że warunek reszty Taylora w formie Peano dla $n = 1$ sprowadza się do warunku definiującego istnienie pochodnej funkcji $f$ w punkcie $x_0$.

**Stwierdzenie 2** *(reszta Taylora w formie Lagrange'a):*

Rozważmy wzór (2) dla wybranego $n$ przy dodatkowym założeniu, że pochodna $f^{(n)}$ jest ciągła na przedziale $[x_0; x]$, zaś we wszystkich punktach wewnętrznych tego przedziału istnieje pochodna *n+1* rzędu. Wówczas reszta $R_n(x)$ może być przedstawiona w postacie

$$R_n(x) \;=\; \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\;(x-x_0)^{n+1} \quad ,$$

gdzie ξ jest pewnym punktem należącym do wnętrza przedziału.

(Cała) Reszta może być zatem przedstawiona jako kolejny wyraz wielomianu (1), który to wyraz jest stopnia $n$+1 w różnicy $x - x_0$, a więc przy zbliżaniu się do $x_0$ maleje i znika najszybciej ze wszystkich.

Czytelnik zwróci uwagę, że dla $n$ = 0, warunek na resztę w postaci Lagrange'a wyraża treść *twierdzenia Lagrange'a o przyrostach:* na przedziale istnieje taki punkt, w którym styczna do wykresu funkcji jest równoległa do siecznej (przechodzącej przez punkty końcowe przedziału).

Dowodzi się (gdy już rozumie się pojęcia: szeregu funkcyjnego oraz zbieżności punktowej i jednostajnej szeregu), że suma nieskończona, tj. formuła (2) przy $n \to \infty$ , jest zbieżna (reszta jest równa dokładnie zero). Szereg nieskończony, w który rozwija się dana funkcja (wokół danego punktu $x_0$) nazywa się **szeregiem Taylora** dla tej funkcji wokół $x_0$.

Szereg Taylora rozwinięty wokół $x_0$ = 0, nosi nazwę **szeregu Maclaurina.**

Od żądanej przez nas dokładności numerycznej zależy, gdzie przerwiemy sumowanie. Im więcej wyrazów uwzględnimy, tym suma będzie dokładniej równa *f(x).*

W szczególności, Czytelnik wyprowadzi wzory na szeregi Maclaurina poniższych funkcji i sprawdzi z podanymi rozwiązaniami:

$$e^x \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \;\equiv\; 1 \;+\; x \;+\; \frac{x^2}{2!} \;+\; \frac{x^3}{3!} \;+\; \ldots$$

$$\sin x \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \;\equiv\; x \;-\; \frac{x^3}{3!} \;+\; \frac{x^5}{5!} \;-\; \frac{x^7}{7!} \;+\; \ldots$$

$$\cos x \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \;\equiv\; 1 \;-\; \frac{x^2}{2!} \;+\; \frac{x^4}{4!} \;-\; \frac{x^6}{6!} \;+\; \ldots$$

Proszę sprawdzić, o ile kąt musi różnić się od 0, aby wyraz nr 2 (3. stopnia) zaczął mieć dopiero 1% wartości wyrazu pierwszego (1. stopnia) w formule na sinus. Ile wówczas wynoszą wyrazy 3 i 4? To da Czytelnikowi skalę dokładności rozwinięcia wokół zera.